

# 101 Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

- Nombre de matrices diagonalisables sur  $\mathbb{F}_q$
- Décomposition de Bruhat

## 1 Actions de groupes

### 1.1 Définitions et premiers exemples

[Ber18]

### 1.2 Orbites et stabilisateurs

[Ber18] [Ulm21]

## 2 L'action pour mieux comprendre le groupe

### 2.1 Action par translation

[Ulm21]

### 2.2 Action par conjugaison, applications aux $p$ -groupes

[Ulm21] [Ber18] [Per96]

### 2.3 Théorie des représentations

[Rom17] [Ulm21]

## 3 L'action pour mieux comprendre l'ensemble

### 3.1 Problème de dénombrement

[Cal22] [Ber18]

#### 3.1.1 Sur les corps finis

#### 3.1.2 Coloriage

### 3.2 Action sur les drapeaux

[FGN07]

# N°102 - Groupe des nombres complexes de module 1. Racines de l'unité. Applications.

- Théorème de structure des groupes abéliens.
- Irréductibilité des polynômes cyclotomiques.

## 1 Nombres complexes de module 1

### 1.1 Le groupe $\mathbb{U}$

[AF92]

### 1.2 Argument et exponentielle complexe

[Rom17]

### 1.3 Applications trigonométriques

[AF92]

## 2 Racines de l'unité et cyclotomie

### 2.1 Sous-groupes de $\mathbb{U}$

[FGN07]

### 2.2 Sous-groupes des racines $n$ -ièmes de l'unité

[AF92] [Per96]

### 2.3 Polynômes cyclotomiques

[Per96] [Gou22]

## 3 Application

### 3.1 Algèbre linéaire

[Gou20]

### 3.2 Représentations de groupes finis

[Rom17] [Ser98] [Col11]

# N°103 - Conjugaison dans un groupe. Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.

## Développements

- Simplicité de  $\mathcal{A}_n$  pour  $n \geq 5$  ([Per96], [Rom17]).
- Théorème de Frobenius-Zolotarev ([BMP05]).

## 1 Conjugaison dans un groupe

### 1.1 Action par conjugaison

[Ulm21], [Per96]

### 1.2 La conjugaison dans le groupe symétrique

[Ulm21], [Per96]

## 2 Sous-groupes distingués

### 2.1 Définition

[Ulm21], [Per96]

### 2.2 Groupes quotients

[Ulm21]

### 2.3 Factorisation d'isomorphisme

[Ber18], [BMP05], [Ulm21]

## 3 Applications

### 3.1 Théorèmes de Sylow

[Per96]

### 3.2 Algèbre linéaire

[Rom17] réduction

### 3.3 La conjugaison en géométrie

[Per96]

# 104 Groupes finis. Exemples et applications.

- Simplicité  $\mathcal{A}_n$
- Structure des groupes abéliens finis

## 1 Outils d'études pour les groupes finis

### 1.1 Ordre d'un élément, théorème de Lagrange

[Ber18] [Ulm21]

### 1.2 Actions de groupe

[Ber18] [Ulm21]

## 2 Premiers résultats de classification

### 2.1 Les $p$ -groupes et les théorèmes de Sylow

[Ber18] [Per96] [Ulm21]

### 2.2 Les groupes abéliens finis

[Col11]

## 3 Exemple du groupe symétrique

[Per96] [Ulm21]

# N°105 - Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

## Développements

- Théorème de Frobenius-Zolotarev.
- Simplicité de  $\mathcal{A}_n$  pour  $n \geq 5$ .

## 1 Groupe symétrique

### 1.1 Actions de groupe

[Ulm21], [Ber18]

### 1.2 Décomposition en cycles disjoints et classes de conjugaisons

[Ulm21], [Ber18]

## 2 Groupe alternée

### 2.1 Définition et premières propriétés

[Ulm21], [Ber18]

### 2.2 Simplicité du groupe alternée

[Ber18]

## 3 Applications

### 3.1 Déterminant

[Gou22], [BMP05]

### 3.2 Sous-groupes finis de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$

[Rom17], [Ulm21], [Com03], [CG13]

# N°106 - Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie $E$ , sous-groupes de $GL(E)$ . Applications.

## Développements

- Décomposition de Bruhat.
- Théorème de Frobenius-Zolotarev.

## 1 Étude algébrique

### 1.1 Généralités

[Per96]

### 1.2 Générateurs de $GL(E)$

[Per96]

### 1.3 Cas des corps finis

[Per96] [Rom17] [BMP05]

## 2 Actions et sous-groupes de $GL(E)$

[CG13], [Rom17], [Per96]

### 2.1 Premiers exemples

### 2.2 Groupe orthogonal / Action par congruence

[Rom17] [CG13]

### 2.3 Drapeaux

[PI19]

## 3 Topologie de $GL(E)$

[Rom17] [MT86]

# 108 Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

- Simplicité  $\mathcal{A}_n$
- Frobenius Zolotarev [BMP05]

## 1 Premiers exemples

### 1.1 Partie génératrice d'un groupe

[Ulm21] [Per96] [Rom17]

### 1.2 Groupes cycliques

[Ulm21] [Per96] [Rom17]

### 1.3 Groupe dérivée

[Ulm21]

## 2 Étude du groupe symétrique

### 2.1 Systèmes de générateurs

[Ulm21] [Per96]

### 2.2 Signature et groupe alterné

[Ulm21] [Per96] [Rom17] [FGN07]

## 3 Le groupe linéaire

### 3.1 $GL(E)$ et $SL(E)$

[Per96] [BMP05]

### 3.2 Le groupe orthogonal

[Per96]

# N°120 - Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Applications.

- Théorème de structure des groupes abéliens finis.
- Irréductibilité des polynômes cyclotomiques.

## 1 Les groupes $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

### 1.1 Construction

[Rom17] [Ber18]

### 1.2 Étude des groupes cycliques

[Ber18]

### 1.3 Théorème de structure des groupes abéliens finis

[Col11]

## 2 Les anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

### 2.1 Le groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$

[Per96] [Rom17]

### 2.2 Automorphisme de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

[Per96]

### 2.3 Le théorème chinois

[Rom17]

## 3 Irréductibilité des polynômes

### 3.1 Irréductibilité sur $\mathbb{Z}$ et sur $\mathbb{Q}$

[Per96]

### 3.2 Cyclotomie

[Per96] [Gou22]



# N°121 - Nombres premiers. Applications.

—  $p = x^2 + 3y^2$ .

— Loi de réciprocité quadratique via les formes quadratiques.

[Rom17] [CG13] [Per96] [Goz09] [Ulm21]

## 1 Arithmétique des nombres premiers

### 1.1 L'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers

### 1.2 Théorème fondamental de l'arithmétique

### 1.3 Répartition des nombres premiers

## 2 Étude des nombres premiers pour l'étude des structures algébriques

### 2.1 $p$ -groupe

### 2.2 Corps finis

### 2.3 Réduction modulo $p$

## 3 Étude des structures algébriques pour l'étude des nombres premiers

### 3.1 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et arithmétique

### 3.2 Représentation des entiers par des formes quadratiques

# N°122 - Anneaux principaux. Exemples et applications.

- Forme normale de Smith.
- $p = x^2 + 3y^2$ .

## 1 Arithmétique des anneaux principaux

### 1.1 Décomposition en irréductible

[Per96] [Ber18]

### 1.2 Théorèmes fondamentaux

[Per96] [Ber18]

### 1.3 Théorème chinois

[Ber18] [Com03]

## 2 Anneaux euclidiens

### 2.1 Algorithme d'Euclide

[Ber18] [Pic99]

### 2.2 Forme normale de Smith

[Ber18]

## 3 Exemples d'anneaux principaux

### 3.1 Entiers de Gauss

[Per96]

### 3.2 Entiers d'Eisenstein

[Per96] [Cal22]

# N°123 - Corps finis. Applications.

## Développements

- Le nombre de de matrice diagonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{F}_q)$ .
- Nombre de polynômes irréductibles de degré  $d$  sur  $\mathbb{F}_q$ .
- Algorithme de Berlekamp.

## 1 Propriétés des corps finis

### 1.1 Construction des corps finis, premières propriétés

[Per96] [Ort04] [Goz09]

### 1.2 Le groupe $\mathbb{F}_q^*$

[Per96] [Ort04] [Goz09]

### 1.3 Les carrés de $\mathbb{F}_q$

[Per96] [Ort04] [Goz09]

## 2 Polynôme irréductible de $\mathbb{F}_q[X]$

### 2.1 Critère d'irréductibilité

[Per96]

### 2.2 Existence et dénombrement des polynômes irréductibles unitaires de $\mathbb{F}_q$

[Goz09], [FG97]

## 3 Algèbre linéaire et bilinéaire sur des corps finis

### 3.1 Le groupe linéaire sur un corps

[Per96], [Rom17]

### 3.2 Ou bien : algorithme de Berlekamp

### 3.3 Réduction et dénombrement

[Rom17], [CG15], [Cal22]

### 3.4 Réduction des formes quadratiques

app : loi de la réciprocité quadratique

# 125 Extensions de corps. Exemples et applications.

- $\mathbb{C}$  est algébriquement clos, preuve par la réduction
  - Polynômes irréductibles de  $\mathbb{F}_q$
- [Goz09] [Per96] [Per96] [Cal22]

## 1 Extension de corps

### 1.1 Théorème de la base télescopique

### 1.2 Algébricité

## 2 Construction d'extensions par adjonction de racines

### 2.1 Corps de rupture

### 2.2 Corps de décomposition

### 2.3 Les corps finis

## 3 Propriété de descente

### 3.1 Irréductibilité des polynômes

### 3.2 Algèbre linéaire

# N° 126 - Exemples d'équations en arithmétique.

— Forme normale de Smith.

—  $p = x^2 + 3y^2$ .

équation diophantienne, système congruence, théorème des deux carrés,  $x^2 + y^2 = z^2$  par géométrie [Com03],  $AX = B$  dans  $\mathbb{Z}$  avec la forme de Smith, dans les corps finis les carrés loi de réciprocité quadratique

## 1 Équations linéaires

### 1.1 Équations diophantiennes sur $\mathbb{Z}$

### 1.2 Système d'équations diophantiennes

### 1.3 Système de congruence

## 2 Équations de degré 2

### 2.1 Carrés dans les corps finis

### 2.2 Représentation d'un entier par une forme quadratique

### 2.3 Exemple d'approche géométrique

## 3 Et de degré supérieur ? (si il reste de la place)

### 3.1 Irréductibilité des polynômes

[Com03] [Per96]

### 3.2 Principe de descente

[Com03]

# N°141 - Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

## Développements

- Nombre de polynômes irréductibles de degré  $d$  sur  $\mathbb{F}_q$ .
- Algorithme de Berlekamp.

## 1 Polynômes irréductibles

### 1.1 Factorialité de $\mathbb{K}[X]$

[Per96], [Goz09], [Rom17]

### 1.2 Critère d'irréductibilité

[Per96]

## 2 Extension de corps

### 2.1 Extension de corps et éléments algébriques

[Per96]

### 2.2 Corps de rupture et corps de décomposition

[Per96], [FG97]

### 2.3 Clôture algébrique

[Per96], [Goz09]

## 3 Applications aux corps finis

### 3.1 Construction des corps finis

[Per96], [Goz09]

### 3.2 Algorithme de Berlekamp

[BMP05]

### 3.3 Algèbre linéaire

[CG13], [FGN09], [Ber18]

# N°142 - PGCD et PPCM, algorithmes de calcul. Applications.

## Développements

- Forme de Smith.
- Algorithme de Berlekamp.

## 1 Anneau factoriel

### 1.1 Arithmétique dans un anneau

[Per96], [Ber18]

### 1.2 PGCD et PPCM dans un anneau factoriel

[Per96], [Ort04], [Ber18], [Gou22]

### 1.3 Contenu d'un polynôme

[Per96]

## 2 Anneaux principaux

[Per96]

### 2.1 Théorème de Bezout

[Ber18], [Per96]

### 2.2 Forme normale de Smith

[Ber18]

### 2.3 Théorème chinois

[Com03]

## 3 Anneaux euclidiens, algorithme de calcul

[Per96]

### 3.1 Algorithme d'Euclide

[Ber18], [Pic99]

### 3.2 Algorithme de Berlekamp

[BMP05]

# N°144 - Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications.

- Polynômes irréductibles de  $\mathbb{F}_q$ .
- $\mathbb{C}$  est algébriquement clos, preuve par la réduction

## 1 Recherche de racines et extensions

### 1.1 Racine d'un polynôme

### 1.2 Adjonctions de racines

## 2 Recherche de racines et réduction

### 2.1 Étude des racines pour la réduction

### 2.2 Réduction pour la localisation des racines

## 3 Polynômes symétriques élémentaires

### 3.1 Relation coefficient racines

### 3.2 Somme de Newton



# N°148 - Exemples de décompositions de matrices. Applications.

- Décomposition de Jordan par la dualité.
- Décomposition de Bruhat.

## 1 Résolution de systèmes linéaires

### 1.1 Pivot de Gauss

[Rom19] [Rom17]

### 1.2 Décomposition LR et de Cholesky

[Rom19] [Rom17]

## 2 Réduction

### 2.1 Réduction de Jordan

[MM16] [Rom17]

### 2.2 Réduction de Frobenius

[MM16] [Rom17]

## 3 Décomposition polaire

### 3.1 Existence

[CG13]

### 3.2 Applications

[CG13]

# N°149 - Valeurs propres, vecteurs propres. Calculs exacts ou approchés d'éléments propres. Applications.

- Convergence de la méthode de la puissance.
- $\mathbb{C}$  est algébriquement clos, preuve par la réduction.

## 1 Généralités

### 1.1 Définitions

[MM16]

### 1.2 Polynôme caractéristique

[MM16]

### 1.3 Matrice compagnon

[MM16] [Cal22]

## 2 Localisation des valeurs propres

### 2.1 Rayon spectral

[Rom19]

### 2.2 Disques de Gerschgorin

[MM16] [Cal22]

## 3 Méthode de calcul

### 3.1 Méthode de la puissance

[Rom19]

### 3.2 Méthode de Jacobi

[Rom19] [Cia06]

### 3.3 Méthode $QR$

[Cia06]

# N°151 - Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

## Développements

- Réduction des endomorphismes normaux.
- Algorithme de Berlekamp.

## 1 Dimension d'un espace vectoriel

### 1.1 Familles génératrices, familles libres, bases

[Gri19]

### 1.2 Dimension finie

[Gri19], [Aud98], [BMP05]

## 2 Rang

### 2.1 Applications linéaires

[FGN19], [Gri19], [BMP05]

### 2.2 Matrices

[Gri19], [BMP05], [Rou09]

## 3 Réduction des endomorphismes normaux

[Rom17]

# N°152 - Déterminant. Exemples et applications.

## Développements

- Inégalité de Hadamard.
- Théorème de Frobenius-Zolotarev.

## 1 Définitions

### 1.1 Construction du déterminant

[Gou22]

### 1.2 Étude de l'application déterminant

## 2 Calcul du déterminant

### 2.1 Pivot de Gauss

[Gou22]

### 2.2 Comatrice

[Gou22]

### 2.3 Déterminants remarquables

[Gou22], [Rom17]

## 3 Applications

### 3.1 Algèbre linéaire

[BMP05], [Gou22]

### 3.2 Interprétation en terme de volume

[BMP05], [Rou09]

# N°153 - Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

- Réduction endomorphismes normaux.
- Réduction de Jordan par la dualité.

## 1 Polynômes d'endomorphismes

### 1.1 L'algèbre $\mathbb{K}[u]$

[MM16] [Ber18] [Rom17]

### 1.2 Polynôme minimal et polynômes caractéristique

[MM16] [Ber18] [Rom17]

### 1.3 Lemme des noyaux

[MM16] [Ber18] [Rom17]

## 2 Réduction

### 2.1 Généralités

[MM16] [Ber18]

### 2.2 Décomposition de Dunford et réduction de Jordan

[MM16] [Rom17]

### 2.3 Endomorphismes remarquables

[Rom17]

## 3 Application

### 3.1 Calculs de puissances et d'inverses

[MM16]

### 3.2 Exponentielle de matrice

[Rom17]

# N°154 - Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

## Développements

- Décomposition de Fitting. Application : dénombrement des matrices nilpotentes de taille  $d$  sur  $\mathbb{F}_q$  ([Cal22]).
- Réduction endomorphismes normaux ([Rom17]).

## 1 Généralités

### 1.1 Premières définitions

[MM16]

### 1.2 Cas particulier

[MM16]

## 2 Décomposition en espaces stables usuels

### 2.1 Espaces cycliques

[BMP05], [Gou22]

### 2.2 Sommes directes

[Gou22], [MM16]

### 2.3 Co-diagonalisation et co-trigonalisation

[MM16]

## 3 Construction d'un supplémentaire stable

### 3.1 Endomorphisme semi-simple

[BMP05]

### 3.2 Espaces stables orthogonaux

[Rom17]

### 3.3 Théorie des représentations

[Rom17]

# N°155 - Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

## Développements

- Le nombre de de matrice diagonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{F}_q)$  est  $\sum_{n_1+\dots+n_q=n} \frac{|\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)|}{|\mathrm{GL}_{n_1}(\mathbb{F}_q)| \cdots |\mathrm{GL}_{n_{q-1}}(\mathbb{F}_q)|}$ .
- Réduction des endomorphismes normaux.

## 1 Polynômes d'endomorphismes et éléments propres

### 1.1 Éléments propres

[MM16]

### 1.2 Polynômes caractéristique et minimal

[MM16], [Ber18]

### 1.3 Diagonalisation

[MM16]

## 2 Critère de diagonalisation

### 2.1 Conditions suffisantes

[MM16]

### 2.2 Conditions nécessaires et suffisantes

[MM16], [CG15]

### 2.3 Co-diagonalisation

[MM16]

## 3 Endomorphismes remarquables

### 3.1 Décomposition de Jordan et Dunford, exponentielle d'endomorphismes

[MM16], [Rom17]

### 3.2 Endomorphisme normaux

[Rom17]

## 4 Topologie des matrices diagonalisables

[Rom17]

# N°156 Exponentielle de matrices. Applications

- Étude de  $O(p, q)$  [CG13]
- Homéomorphisme de l'exponentielle [CG13]

## 1 Généralités

### 1.1 Définition et premières propriétés

### 1.2 Calcul de l'exponentielle de matrice

## 2 Régularité

### 2.1 Continuité et différentiabilité

### 2.2 Applications aux EDO linéaires

## 3 Question de topologie

### 3.1 Injectivité et surjectivité

### 3.2 Inversion de l'exponentielle



# N°157 - Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

## Développements

- Décomposition de Fitting, cardinal du cône nilpotent.
- Réduction de Jordan par la dualité.

## 1 Rappels : polynômes d'endomorphismes

[MM16], [Ber18]

## 2 Endomorphismes trigonalisables

### 2.1 Définition et caractérisations

[MM16], [Ber18]

### 2.2 Topologie

[MM16], [Rom17]

## 3 Endomorphismes nilpotent

### 3.1 Définition et caractérisations

[Ber18], [BMP05]

### 3.2 Structure de l'ensemble des matrices nilpotentes

[BMP05], [Cal22]

## 4 Réduction

### 4.1 Décomposition de Dunford

[MM16], [Ber18]

### 4.2 Décomposition de Jordan

[MM16], [Ber18] Jordan par la dualité : [Rom17]

### 4.3 Application à l'exponentielle de matrices

[Rom17]

# 158 Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

- Ellipsoïde de John-Loewner
- Homéomorphisme de l'exponentielle [CG13]

## 1 Espaces des matrices symétriques et hermitiennes

### 1.1 Généralités

### 1.2 Théorème spectral

## 2 Conséquence du théorème spectral

### 2.1 Rayon spectral

### 2.2 Racine carré et décomposition polaire

### 2.3 Exponentielle de matrice

## 3 Applications en géométrie et en calcul différentiel

### 3.1 Théorème de pseudo-réduction simultanée

ellipsoïde John et classifications des coniques

### 3.2 Matrice hessienne

extremum

# N°159 - Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

- Réduction de Jordan par la dualité.
- Théorèmes de Hahn-Banach.

## 1 Espace dual

### 1.1 Formes linéaires

[Rom17] [Cal22]

### 1.2 Bases duale et antéduale

[Rom17]

### 1.3 Bidual

[Rom17] [Cal22]

## 2 Orthogonalité et application transposée

### 2.1 Orthogonalité

[Rom17] [Gou22]

### 2.2 Transposition

[Rom17] [Cal22] [Gou22]

## 3 Applications

### 3.1 Théorèmes de Hahn-Banach

[Bre05]

### 3.2 Réduction

[Rom17] [Gou22]

# N°160 - Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

## Développements

- Réduction des endomorphismes normaux.
- $O(p, q)$ .

## 1 Exemples d'endomorphismes remarquables

### 1.1 Produit scalaire

[Rom17]

### 1.2 Adjoint d'un endomorphisme

[Rom17]

### 1.3 Endomorphismes remarquables

[Rom17]

## 2 Réduction

### 2.1 Réduction des endomorphismes normaux

[Rom17]

### 2.2 Réduction des endomorphismes orthogonaux

[Rom17], [Gri19]

### 2.3 Théorème spectral

[Rom17], [CG13]

## 3 Étude du groupe orthogonal

### 3.1 Les groupes $O(E)$ et $SO(E)$

[Per96], [CG13]

### 3.2 Sous-groupes finis de $SO_2(\mathbb{R})$ et de $SO_3(\mathbb{R})$

[Ulm21], [CG13], [Com03]

## N°161 - Distances dans un espace affine euclidien. Isométries.

# N°162 - Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

## Développements

- Forme de Smith.
- Décomposition de Bruhat.

## 1 Méthodes directes

### 1.1 Position du problème

[Gri19], [Rom17]

### 1.2 Opérations élémentaires et pivot de Gauss

[Gri19], [Rom19], [Rom17]

### 1.3 Système de Cramer

[Gri19], [Rom19]

## 2 Conséquence théorique

### 2.1 Le groupe linéaire

[Rom19], [Rom17], [PI19]

### 2.2 Système d'équations et dimension

[Gou22], [Gri19]

### 2.3 Cas des anneaux euclidiens

[Ber18]

## 3 Autres méthodes

### 3.1 Méthodes de décompositions

[Rom19], [Rom17]

### 3.2 Méthodes itératives

[Rom19]

# N°170 - Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

## Développements

- $O(p, q)$ .
- Loi de réciprocité quadratique via les formes quadratiques.

## 1 Généralités

### 1.1 Forme bilinéaire symétrique

[Gri19], [Gou22]

### 1.2 Forme quadratique

[Gri19], [Gou22], [FGN08]

## 2 Orthogonalité et isotropie

### 2.1 Bases orthogonales, algorithme de Gauss

[Gri19], [Gou22]

### 2.2 Isotropie

[Gri19], [Gou22]

### 2.3 Groupe orthogonal

[Per96], [Gri19]

## 3 Classifications des formes quadratiques

[Per96]

### 3.1 Sur les corps algébriquement clos

### 3.2 Sur $\mathbb{R}$

### 3.3 Sur les corps finis

## 4 Calcul différentiel

[Rou09], [Gou20]

# 171 Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.

- Étude de  $O(p, q)$  [CG13]
- Ellipsoïde de John Loewner [FGN08]

## 1 Formes quadratiques réelles

### 1.1 Formes bilinéaires symétriques

[Gri19] [Gou21]

### 1.2 Formes quadratiques

[Gou21] [Gri19]

## 2 Réduction et classification

### 2.1 Orthogonalité et méthode de Gauss

[Gou21] [Gri19]

### 2.2 Théorème de Sylvester

[Gri19] [Gou21]

## 3 Le groupe orthogonal

### 3.1 Définition et générateurs

[Gri19] [Per96] [FGN08]

### 3.2 Étude de $O(p, q)$

[CG13]

## 4 Coniques

### 4.1 Définition par des formes quadratiques

[Aud98]

### 4.2 Classification

[Aud98]



# N°181 - Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.

## Développements

- Convergence d'une suite de polynômes.
- Théorèmes de Hahn-Banach.

# N°190 - Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

## Développements

- Le nombre de matrice diagonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{F}_q)$  est  $\sum_{n_1+\dots+n_q=n} \frac{|\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)|}{|\mathrm{GL}_{n_1}(\mathbb{F}_q)| \cdots |\mathrm{GL}_{n_{q-1}}(\mathbb{F}_q)|}$ .
- Nombre de polynômes irréductibles de degré  $d$  sur  $\mathbb{F}_q$ .

## 1 Introduction et premiers exemples

### 1.1 Ensemble fini

[Gou22], [FGN07]

### 1.2 Arrangements

[Gou22]

### 1.3 Combinaisons

[Gou22]

## 2 Série génératrice

[FGN07], [Gou22]

## 3 Applications aux corps finis

### 3.1 Le groupe linéaire

[Per96]

### 3.2 La fonction de Möbius (interlude)

[Ber18]

### 3.3 Polynômes irréductibles sur les corps finis

[FG97]

## 4 Les actions de groupe au service du dénombrement

### 4.1 Équations aux classes

[Ulm21], [Ber18]

### 4.2 Coloriages

[Ber18]

### 4.3 Algèbre linéaire sur les corps finis

[CG15], [Cal22]

# 191 Exemples d'utilisation de techniques d'algèbre en géométrie

- Inégalité de Hadamard
- Convergence d'une suite de polygones

## 1 Utilisation du déterminant en géométrie

### 1.1 Orientation de l'espace

### 1.2 Aires et volumes

### 1.3 Distances

## 2 Géométrie affine

### 2.1 Le groupe affine

### 2.2 Isométries conservant une partie

### 2.3 Barycentre

## 3 Utilisation des formes quadratiques en géométrie

### 3.1 Généralités

### 3.2 Classification des coniques

## Références

- [AF92] J.M. Arnaudiès and H. Fraysse. *Cours de mathématiques - 1. Algèbre*. Dunod, 1992.
- [Aud98] M. Audin. *Géométrie*. EDP Sciences, 1998.
- [Ber18] G. Berhuy. *Algèbre : le grand combat*. Calvage et Mounet, 2018.
- [Ber21] F. Berthelin. *Équations différentielles*. Cassini, 2021.
- [BMP05] V. Beck, J. Malick, and G. Peyré. *Objectif Agrégation*. H&K, 2005.
- [Bre05] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle*. Dunod, 2005.
- [Cal22] P. Caldero. *Carnet de voyage en Algèbre*. C&M, 2022.
- [CG13] P. Caldero and J. Germoni. *Histoire hédonistes de groupes et de géométries. Tome premier*. C&M, 2013.
- [CG15] P. Caldero and J. Germoni. *Histoire hédonistes de groupes et de géométries. Tome second*. C&M, 2015.
- [Cia06] P. Ciarlet. *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*. Sciences Sup, 2006.
- [Col11] P. Colmez. *Éléments d'analyse et d'algèbre (et de théorie des nombres)*. Les éditions de l'école polytechnique, 2011.
- [Com03] F. Combes. *Algèbre et géométrie*. Bréal, 2003.
- [FG97] S. Francinou and H. Gianella. *Exercices de mathématiques pour l'agrégation. Algèbre 1*. Masson, 1997.
- [FGN07] S. Francinou, H. Gianella, and S. Nicolas. *Oraux X-ENS. Algèbre 1*. Cassini, 2007.
- [FGN08] S. Francinou, H. Gianella, and S. Nicolas. *Oraux X-ENS. Algèbre 3*. Cassini, 2008.
- [FGN09] S. Francinou, H. Gianella, and S. Nicolas. *Oraux X-ENS. Algèbre 2*. Cassini, 2009.
- [FGN19] S. Francinou, H. Gianella, and S. Nicolas. *Oraux X-ENS. Mathématiques 1*. Cassini, 2019.
- [Gou20] X. Gourdon. *Analyse*. Ellipses, 2020.
- [Gou21] X. Gourdon. *Algèbre*. Ellipses, 2021.
- [Gou22] X. Gourdon. *Algèbre Probabilités*. Ellipses, 2022.
- [Goz09] I. Gozard. *Théorie de Galois*. Ellipses, 2009.
- [Gri19] J. Grifone. *Algèbre linéaire*. Cépaduès, 2019.
- [MM16] R. Mansuy and R. Mneimné. *Algèbre linéaire. Réduction des endomorphismes*. Vuibert, 2016.
- [MT86] R. Mneimné and Frédéric Testard. *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques*. Hermann, 1986.
- [Ort04] P. Ortiz. *Exercices d'algèbre*. Ellipses, 2004.
- [Per96] D. Perrin. *Cours d'algèbre*. Ellipses, 1996.
- [PI19] T. Pecatte and L. Isenmann. *L'oral à l'agrégation de mathématiques - Une sélection de développements*. Ellipses, 2019.
- [Pic99] P. Saux Picart. *Cours de calcul formel. Algorithmes fondamentaux*. Ellipses, 1999.
- [Rom17] J.-E. Rombaldi. *Mathématiques pour l'agrégation. Algèbre & géométrie*. deboeck, 2017.
- [Rom19] J.-E. Rombaldi. *Analyse matricielle. Cours et exercices résolus*. EDP Sciences, 2019.
- [Rou09] F. Rouvière. *Petit guide de calcul différentiel*. Cassini, 2009.
- [Ser98] J.-P. Serre. *Représentations linéaires des groupes finis*. Hermann, 1998.
- [Ulm21] F. Ulmer. *Théorie des groupes*. Ellipses, 2021.